

Physikalisches Praktikum 1

Versuch M5
Schwingungsformen gekoppelter Pendel

Verfasser:

Moritz Schubotz

Betreuer:

Sebastian Weber

Abgabetermin:

0.1 Inhalt

0.1	Inhalt.....	2
1	Ausmessen der Koppelfeder	3
1.1	Beantwortung der Fragen:.....	3
2	Aufbau der physikalischen Pendel.....	4
2.1	Beantwortung der Fragen:.....	4
3	Kopplung der Pendel	5

1 Ausmessen der Koppelfeder

1.1 Beantwortung der Fragen:

- Wie bestimmen Sie am besten aus der Meßreihe die Federkonstante?

In guter Näherung kann die Gravitation als konstant angesehen werden. Dann ist die Kraft proportional zur Masse und der relative Quotient aus Masse und Weg entspricht der Federkonstanten.

- Welches Verhalten der Feder erwarten Sie?

Man erwartet, dass die Auslenkung der Feder Proportional zum Gewicht ist.

Und tatsächlich erfüllt sich die Erwartung. Die Gerade hat einen Bestimmtheitsgrad von 99,96% das Bedeutet, dass der Fehler wahrscheinlich viel zu groß gewählt wurde. Es gelten die Beziehungen:

$$F = K \cdot x$$

$$Mg + K \Delta x = 0 \Leftrightarrow \frac{Mg}{\Delta x} = K \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial x} \cdot g = K \Rightarrow K = 31,4 \frac{kg}{s^2}$$

$$\Delta K = \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2} = \frac{0,01}{3,2} = 0,003 \rightarrow \text{Der Fehler kann vernachlässigt werden.}$$

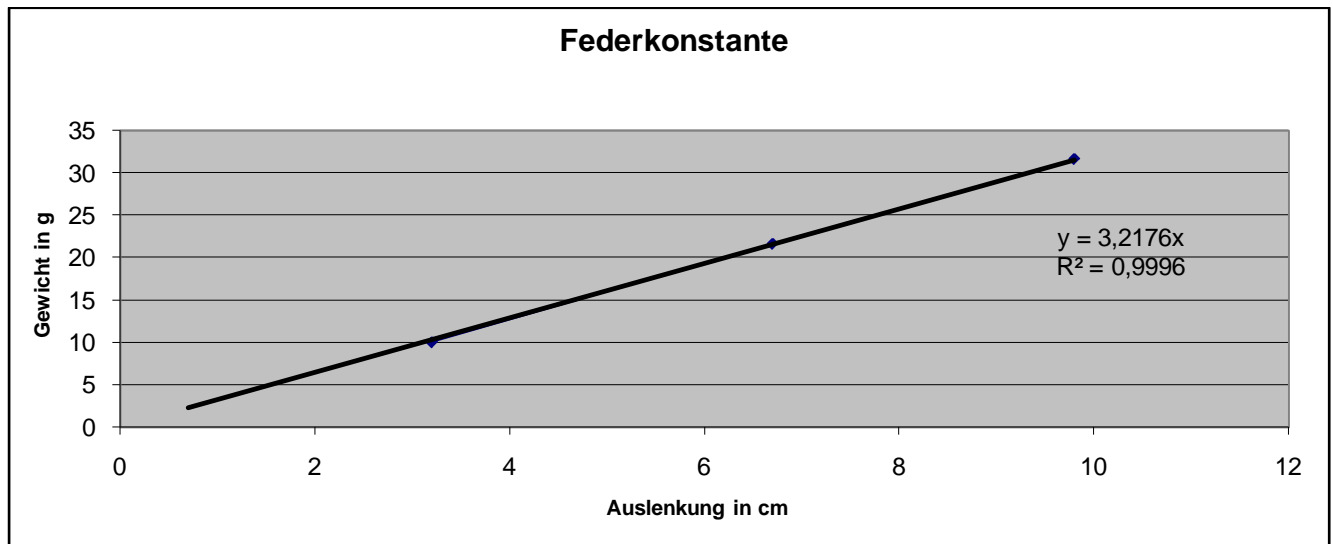


Diagramm 1 Auslenkung in cm gegen gewicht in g ,Fehlerbalken! zu klein um gesehen zu werden.

Tabelle 1

a	m
cm	g
	3,2
	6,7
	9,8
	10
	21,6
	31,6

2 Aufbau der physikalischen Pendel

2.1 Beantwortung der Fragen:

- **Wie berechnen Sie die Frequenz eines physikalischen Pendels, d.h. wie bestimmen Sie die Größen M , μ und s aus Formel 2?**

Das Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders ist $\theta_z = \frac{M_z}{4} \left(\frac{h_z^2}{3} + r_z^2 \right)$. Der Stab ist auch ein Zylinder. Wenn das Koordinatensystem kein Schwerpunktsystem ist muss mit dem Steinerschen Satz umgerechnet werden (vgl. Landau Lifschitz Mechaik 1). Damit ist

$$\theta_{Stab} = m_s d_s^2 + \theta_z. \text{ Nun wählt man die Drehachse als Bezugssystem.}$$

$$J = m_1 d_1^2 + \theta_{z1} + m_2 d_2^2 + \theta_{z2} + \theta_{Stab} + m_s d_s^2$$

1. Trägheitsmoment Zylinder: $\theta_z = \frac{1.56kg}{4} \left(\frac{(0.04m)^2}{3} + (0.04m)^2 \right) = 8.32 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$
 (Löcher und Schrauben wurden nicht berücksichtigt)

2. Trägheitsmoment Stab: $\theta_{Stab} = \frac{0.5201kg}{4} \left(\frac{(0.8m)^2}{3} + (0.005m)^2 \right) = 0.0277kg \cdot m^2$

3. $d_s = 0.1m$ Abstand Stabschwerpunkt - Drehachsen Aufhängung

4. $J = 2\theta_z + d1^2 \cdot m_z + d2^2 \cdot m_z + \theta_{Stab} + d_s^2 \cdot m_s = 0.353kg \cdot m^2$

- **Welche Fehler gehen in diese Rechnung ein?**

5. Die dominierenden Größen sind hier $M_z (d2^2 + d1^2)$, daher müsste es ausreichen den Fehler dieser Größen zu betrachten.

$$\frac{\Delta J}{J} = \sqrt{\left(\frac{\Delta M_z}{M_z} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta d2}{d2} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta d1}{d1} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.005}{1.56} \right)^2 + \left(2 \frac{0.001}{0.278} \right)^2 + \left(2 \frac{0.001}{0.357} \right)^2} = 0.01 \text{ Hiermit ist der}$$

Fehler vernachlässigbar!

- **Wie messen Sie möglichst genau die Frequenz der physikalischen Pendel?**

Mit dem Echolot!

- **Wo stecken hier die Fehlerquellen?**

Auch im Echolot. Die Datenauswertung war ein Desaster.

- **Müssen für diesen Versuch nur die Frequenzen der Pendel übereinstimmen ($\omega_a = \omega_b$), oder müssen die Pendel wirklich identisch sein ($\theta_a = \theta_b$ und $D_a = D_b$)?**

Die Pendel müssen nicht Identisch sein.

$$\text{Es gilt: } L = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_s d_s}{m_1 + m_2 + m_s} \quad D = M_{ges} \cdot g \cdot L \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{3.64kg \cdot 9.81m \cdot s^{-2} \cdot 0.048m}{0.353kg \cdot m^2}} = 2.204 \frac{1}{s}$$

Der Experimentell gemessene Wert über 70 Extrema und 50s Messdauer Maxima beträgt $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\omega_0 = \frac{81\pi}{120s} = 2.199Hz. \text{ Das Ergebnis ist OK.}$$

3 Kopplung der Pendel

Die normale Differentialgleichung für ein Pendel ist $J \frac{d^2}{dt^2} \phi + MgL\phi = 0$. Die Feder impliziert es eine Kopplungskraft nach Hookischem Gesetz $F = K(\Delta s_0 + z(\phi_a - \phi_b))$ (Δs_0 kann vernachlässigt werden). Nun wirkt diese Kraft ein weiteres Drehmoment aus so das $J \frac{d^2}{dt^2} \phi + MgL\phi = F \cdot z$ ist.

Nun lassen sich die zwei Pendel mit zwei Gleichungen beschreiben

$$6. \quad J \frac{d^2}{dt^2} \phi + MgL\phi = Kz \cdot (\phi_b - \phi_a) \cdot z$$

$$7. \quad J \frac{d^2}{dt^2} \phi + MgL\phi = Kz \cdot (\phi_a - \phi_b) \cdot z$$

Der Kopplungsfaktor ist definiert durch $\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}$ oder $\kappa = \frac{-2\omega_+ \cdot \omega_-}{\omega_+^2 + \omega_-^2}$, wobei ω_+ ist die Frequenz der quasiharmonischen schwingenden Pendel ist und ω_- die Frequenz der Amplitudenmodulation ist. Sehr gut zu beobachten ist es für $\omega_- \ll \omega_+$

Die Pendel werden mit einer Spiralfeder verbunden. Um die Frequenz der ersten Eigenschwingung zu ermitteln werden beide Pendel gleich (mit gleichem Winkel) ausgelenkt und gleichzeitig losgelassen. Für die zweite Eigenschwingung werden die Pendel gegeneinander ausgelenkt und losgelassen und es wird wieder T gemessen.

Eine Schwebung wird ausgelöst wenn nur ein Pendel ausgelenkt wird und das andere auf der Ruheposition (die es einnimmt, wenn **beide** ruhen, verharrt).

Auswertung und Fehlerrechnung von $\omega_2, \omega_+, \omega_-$

Hier zu wurden die Zeit wieder über mehrere Schwingungsperioden mehrmals gemessen. Dazu wurde das Echolot verwendet. Die Messungen wurden mit verschiedenen z-Werten gemessen. (z = Abstand zwischen Aufhängung Pendel und Aufhängung Feder)

Im folgen ist die Standardabweichung $[v] = \sqrt{\sum v^2}$.

1. z=0.126m

ω_2

Perioden 10 10 10

Zeit in s 2.88 12.88 42.89 1 Mittelwert 2.885

v - 0.001 0.006 [v] 0.000053

0.004

Physikalisches Praktikum 1
Versuch M5 - Schwingungsformen gekoppelter Pendel

$$[\Delta v] = 0.0029 \quad T = 2.89s \pm 0.01s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.001$$

ω_+

Zeit 2.912.8852.903 Mittelwert 2.899
 v 0.08- 0.004 [vv] 0.0022
 0.014

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.0022s^2}{6}} = 0.019s \quad T = 2.889 \pm 0.019s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.007$$

ω_-

Zeit 102.15104.19 Mittelwert 103.17
 v -1.02 1.02 [vv] 2.08

$$\Delta T = \sqrt{\frac{2.08s^2}{2}} = 1.02s \quad T = 103.17 \pm 1.02s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.01$$

2. z=0.176m

ω_2

Zeit 2.7852.7912.781 Mittelwert 2.786
 v - 0.005- [vv] 0.00005
 0.001 0.005

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.00005s^2}{6}} = 0.003s \quad T = 2.786 \pm 0.003s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.001$$

ω_+

Zeit 3.0122.8182.9262.8392.843 Mittelwert 2.888
 v 0.136-0.07 0.028- - [vv] 0.02826
 0.0490.041

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.02826s^2}{20}} = 0.038s \quad T = 2.888 \pm 0.038s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.013$$

Physikalisches Praktikum 1
Versuch M5 - Schwingungsformen gekoppelter Pendel

Perioden	5	6	5	7	6	Mittelwert
Zeit in s	15.06	16.91	14.63	19.87	17.06	14.44
v	0.62	-0.35	0.27	-0.25	-0.22	

$$[vv]=0.14 \quad \Delta t = \sqrt{\frac{0.14s^2}{5 \cdot 4}} = 0.007s \quad t = 14.44 \pm 0.007s \quad T = 2.89s \pm 0.01s$$

ω_-

Zeit	53.86	52.84	Mittelwert	53.35
v	0.51	-0.51	[vv]	0.52

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.52s^2}{2}} = 0.51s \quad T = 53.35 \pm 0.51s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.01$$

3. z=0.238m

ω_2

Zeit	2.71	2.67	2.65	2.70	Mittelwert	2.68
v	0.03	-	-	0.02	[vv]	0.0023
	0.01	0.03				

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.0023s^2}{4 \cdot 3}} = 0.014s \quad T = 2.68 \pm 0.014s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.005$$

ω_+

Zeit	2.76	2.78	2.79	2.42	2.82	2.77	2.62	2.78	Mittelwert	2.791
v	-	0.003	0.03	0.03	-0.15	-			[vv]	0.0244
	0.031									0.004

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.0244s^2}{4 \cdot 5}} = 0.034s \quad T = 2.791 \pm 0.034s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.012$$

ω_-

Zeit	30.23	30.36	Mittelwert	30.30
------	-------	-------	------------	-------

Physikalisches Praktikum 1

Versuch M5 - Schwingungsformen gekoppelter Pendel

$$v \quad -0.07 \quad 0.06 \quad [\text{vv}] \quad 0.0036$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.0036 \text{ s}^2}{2}} = 0.08 \text{ s} \quad T = 30.3 \pm 0.08 \text{ s} \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.003$$

4. $z=0.255\text{m}$

ω_2

Zeit 2.628 2.638 2.641 Mittelwert 2.636

$$v \quad - \quad 0.0020 \quad 0.005 [\text{vv}] \quad 0.000093$$

$$0.008$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.00093 \text{ s}^2}{6}} = 0.004 \text{ s} \quad T = 2.636 \pm 0.004 \text{ s} \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.002$$

ω_+

Zeit 2.805 2.8 2.873 2.773 Mittelwert 2.813

$$v \quad - \quad - \quad 0.06 \quad -0.04 [\text{vv}] \quad 0.0054$$

$$0.0080.013$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.0054 \text{ s}^2}{12}} = 0.021 \text{ s} \quad T = 2.813 \pm 0.021 \text{ s} \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.007$$

ω_-

Zeit 26.54 25.99 26.4 Mittelwert 26.31

$$v \quad 0.023 - \quad 0.007 [\text{vv}] \quad 0.0016$$

$$0.032$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.0016 \text{ s}^2}{6}} = 0.016 \text{ s} \quad T = 26.31 \pm 0.016 \text{ s} \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.0006$$

5. $z=0.284\text{m}$

ω_2

Zeit 2.575 2.572 2.584 Mittelwert 2.577

Physikalisches Praktikum 1
Versuch M5 - Schwingungsformen gekoppelter Pendel

v - - 0.007[vv] 0.000049
 0.0020.005

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.000049s^2}{6}} = 0.006s \quad T = 2.577 \pm 0.006s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.002$$

ω_+

Zeit2.742.662.842.70Mittelwert2.74

v 0 - 0.1 - [vv] 0.0016
 0.08 0.04

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.0016s^2}{12}} = 0.129s \quad T = 2.74 \pm 0.13s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.047$$

ω_-

Zeit21.1821.1821.32Mittelwert21.23

v -0.05 -0.05 0.09 [vv] 0.0131

$$\Delta T = \sqrt{\frac{0.0131s^2}{6}} = 0.047s \quad T = 21.23 \pm 0.05s \quad \frac{\Delta T}{T} = 0.002$$

Aus diesen Daten wird mit der Formel $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2} = \frac{\Delta T}{T}$ ω_2 , ω_+ und ω_- berechnet.

Wobei ω_- durch 2 geteilt wird weil nur die halben Perioden gemessen wurden sind

z	ω_2	ω_+	ω_-
0.1262.1882.167	0.7%		0.031
			1%
	0.1%		
0.1762.2552.176	1.3%		0.059
			1%
	0.1%		
0.2382.3452.251	1.2%		0.104
			0.3%
	0.5%		

Physikalisches Praktikum 1

Versuch M5 - Schwingungsformen gekoppelter Pendel

$$0.2552.384 \ 2.234 \pm 0.016 \ 0.120$$

$$| \quad | \ 0.7\%$$

0.2%

$$0.2842.4382.293 \ | \ 4.7\% \ 0.146$$

| \quad | \ 0.2%

0.2%

$$\omega_0 = 2.116 \frac{1}{s} \ | \ 0.3\%$$

Vergleichrechnung:

(für $z=0.126\text{m}$ und $K = 3 \text{ N/m}$)

1. Berechnen von κ

Hierzu stehen zwei Formeln $\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{-2\omega_+\omega_-}{\omega_+^2 + \omega_-^2}$ zu Verfügung

Der mittlere Fehler lässt sich mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung berechnen

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\omega_+} \Delta\omega_+\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial\omega_-} \Delta\omega_-\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\omega_+\omega_-^2 - 2\omega_+^3}{(\omega_+^2 + \omega_-^2)^2} \Delta\omega_+\right)^2 + \left(\frac{2\omega_+\omega_-^2 - 2\omega_-^3}{(\omega_+^2 + \omega_-^2)^2} \Delta\omega_-\right)^2}$$

$$\frac{\Delta\kappa}{\kappa} = \sqrt{\left(\omega_+ - \frac{\omega_-^2}{\omega_+}\right)^2 \Delta\omega_+^2 + \left(\omega_- - \frac{\omega_+^2}{\omega_-}\right)^2 \Delta\omega_-^2}$$

Da $\omega_1 < \omega_2$ werden die ω_- Werte mit -1 multipliziert

Z	$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}$	$\kappa = \frac{-2\omega_+\omega_-}{\omega_+^2 + \omega_-^2}$	$\frac{\Delta\kappa}{\kappa}$
0.1260	0.0334	0.028	6%
0.1760	0.0635	0.054	
0.2380	0.102	0.092	
0.2550	0.119	0.107	
0.2840	0.141	0.127	

Da sich die Fehler nicht sonderlich unterscheiden wird hier der Fehler auch unter 10% bleiben.

2. K bestimmen

$\kappa = \frac{Kz^2}{MgL + Kz^2}$ für kleine $z \leq 0.2$ ist $\kappa = \frac{Kz^2}{MgL}$ was umgeformt wird zu $\frac{\kappa}{z^2} = \frac{K}{MgL}$. κ wird gegen z^2 in

einem Graphen aufgetragen und die Steigung abgelesen. Also $b \cdot MgL = K$

Physikalisches Praktikum 1

Versuch M5 - Schwingungsformen gekoppelter Pendel

für $\kappa = \frac{-2\omega_+\omega_-}{\omega_+^2 + \omega_-^2}$ ist $b = 1.4 \frac{1}{m^2}$ und $K = 2.89 \frac{N}{m}$. Durch die Näherung ist hier ein größerer Fehler entstanden eigentlich sollten z werte ≤ 0.2 genommen werden!

Für $\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}$ ist $b = 2.2 \frac{1}{m^2}$ und $K = 3.74 \frac{N}{m}$. Da hier K offensichtlich zu Groß ist, sind die Messungen von ω_2 vermutlich nicht korrekt.